

فصل کاربردهای مشتق

(۱) نشان دهید معادله $x^{2n+1} + ax + b = 0$; $a > 0, n \in \mathbb{N}$ دقیقاً یک ریشه دارد.

(۲) نشان دهید برای هر $x > 0$:

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x \quad (\text{الف}) \quad \frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (\text{ب})$$

(۳) اگر $0 < \beta \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ نشان دهید:

$$\frac{\alpha - \beta}{(\cos \beta)^2} \leq \tan \alpha - \tan \beta \leq \frac{\alpha - \beta}{(\cos \alpha)^2}$$

(۴) ثابت کنید معادله $x = 2^{-x}$ در بازه $(0, 1)$ تنها یک ریشه دارد.

$$\frac{x^2}{4} < x - \ln(1+x) < \frac{x^2}{2} \quad \forall 0 < x < 1 \quad (\text{۵})$$

(۶) نشان دهید معادلات زیر دقیقاً یک ریشه حقیقی دارند:

$$۱) 2x - 1 - \sin x = 0$$

$$۲) 3x^5 + 15x - 8 = 0$$

$$۳) e^{-2x} - x^2 = 0$$

(۷) نشان دهید: $(x+1)\ln(1+x) > \arctan x \quad \forall x > 0$

(۸) ثابت کنید: $x - \frac{x^2}{3} < \arctan x < x - \frac{x^2}{6} \quad \forall 0 \leq x \leq 1$

(۹) اگر f در شرط $f'(x) = \frac{1}{x^2 + (f(x))^2}$ صدق کند و نمودار تابع از نقطه $(0, 1)$ عبور کند آنگاه نشان دهید:

$$1 \leq f(x) \leq x+1 \quad \forall x \geq 0$$

(۱۰) نشان دهید: $\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cot x \leq \ln \sin x \leq 0 \quad \forall \frac{\pi}{2} < x < \pi$

(۱۱) نشان دهید: $\left(\frac{b}{a}\right)^a < e^{b-a} < \left(\frac{b}{a}\right)^b \quad \forall 0 < a < b$ و سپس نتیجه بگیرید که:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad \forall x > 0$$

(۱۲) نشان دهید: $(a-b)\tan b < \ln\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right) < (a-b)\tan a \quad \forall 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$

(۱۳) به کمک قضیه کوشی نشان دهید: $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x} < 1 \quad \forall x \geq 0$

(۱۴) آیا تابع دیگری غیر از e^x هست که مشتق آن با خودش برابر باشد؟

(۱۵) هرگاه $a_n + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0$ آنگاه معادله زیر در بازه $(0, 1)$ چند ریشه دارد:

$$a_n + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

(۱۶) در تابع $y = \arctan \sqrt{x}$ مقدار تقریبی تغییر y وقتی x از ۴ به ۴٫۱ افزایش می یابد را محاسبه کنید.

(۱۷) مقدار تقریبی $\sqrt[5]{65}$ و $\ln(1/0.01)$ را محاسبه کنید.